INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

# Vektorové prostory a podprostory

Michal Botur

## Přednáška 5

KAG/DLA1M: Lineární algebra 1

# Soustavy lineárních rovnic

Vektorové prostory jsou samotným jádrem lineární algebry. Jedná se o matematický model jehož současná podoba je výsledkem několikasetletého vývoje. Prvotní představa vektorů, která koresponduje se středoškolským pojetím, vizualizuje vektory jakožto orientované šipky se společným počátkem. Tyto se dají snadno vyjádřit jako dvojice nebo trojice reálných čísel (v závislosti, zda-li uvažujeme rovinné vektory či vektory „našeho" tří dimenzního prostoru). Rozvoj fyziky i výtečná aplikovatelnost teorie na celou škálu matematických i jiných problému vedla ke zobecnění vektoru na libovolně (dokonce i nekonečně) dimenzionální vektory. Navic jednotlivými složkami nemusí být čísla reálná, ale libovolné prvky některého komutativního tělesa.

V této lekci si definujeme vektorový prostor a podprostor. Ukážeme si základní vlastnosti vektorových prostorů. Definujeme si navíc pojmy lineární kombinace vektorů a ukážeme si její význam.

**Definice 5.1** Trojici $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$ nazveme *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ , jestliže $\mathbf{T}$ je komutativní těleso (prvky tohoto tělesa nazýváme *vektory*), $\mathbf{V} = (V; +)$ je komutativní grupa (prvky této grupy nazýváme *vektory*), $\cdot$ je zobrazení $\cdot\colon T \times V \longrightarrow V$ (tzv. levá vnější operace, kdy násobíme vektor skalárem a výsledkem je opět vektor) a navíc platí pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a skaláry $k, s \in T$, že

i) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$,

ii) $(ks)\vec{v} = k(s\vec{v})$,

iii) $(k + s)\vec{v} = (k\vec{v}) + s\vec{v}$,

iv) $k(\vec{u} + \vec{v}) = (k\vec{u}) + (k\vec{v})$.

V grupě vektorů značíme její nulový prvek $\vec{o}$ a nazýváme jej *nulový vektor*. Opačný vektor k vektoru $\vec{v}$ značíme $-\vec{v}$. Ukažme si několik příkladů vektorových prostorů:

**Příklad 5.1** Jestliže $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, potom trojice $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \cdot)$, kde sčítání vektorů definujeme pomocí

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobení vektoru skalárem jako

$$k \cdot (x_1, \cdot, x_n) = (kx_1, \cdot, kx_n).$$

Tento vektorový prostor se nazývá *aritmetický vektorový prostor dimenze* $n$. Je zřejmé, že těleso $\mathbb{R}$ lze nahradit libovolným jiným tělesem.

**Příklad 5.2** Jestliže $M$ je libovolná množina, potom trojice $(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^M$ značí množinu všech zobrazení $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$. Sčítání vektorů definujeme pomocí

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

a násobení vektoru skalárem jako

$$(k \cdot f)(m) = k \cdot (f(m)).$$

Tento příklad je ve skutečnosti zobecněním předchozího. Představme si, že množství dimenzí není určeno počtem, ale množinou. Tedy vektor má tolik dimenzí, kolik je prvků v množině $M$. Výraz $f(m)$ lze číst jako „hodnota vektoru $f$ na souřadnici $m$“. Je-li množina $M$ konečná a má-li $n$ prvků, potom je tento prostor aritmetický $n$-dimenzionální. V případě nekonečných množin dostáváme nové, nekonečně dimenzionální prostory. I zde lze těleso $\mathbb{R}$ nahradit libovolným jiným tělesem.

**Definice 5.2** Mějme dva vektorové prostory $\mathcal{U} = (\mathbf{U}, \mathbf{T}, \circ)$ a $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$, kde grupy sčítání vektorů označme jako $\mathbf{U} = (U; \oplus)$ a $\mathbf{V} = (V; +)$. Potom řekneme, že *$\mathcal{U}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$* (značíme $\mathcal{U} \subseteq\subseteq \mathcal{V}$) jestliže platí, že

i) $U \subset V$,

ii) jestliže $\vec{u}, \vec{v} \in U$ platí, že $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$,

iii) jestliže $k \in T$ a $\vec{v} \in U$, potom $k \circ \vec{v} = k \cdot \vec{v}$.

Druhá a třetí podmínka říká, že operace na „menším“ prostoru jako ty na prostoru „větším“. Z tohoto důvodu je nadále nebudeme rozlišovat značení (toto mělo smysl pro snazší formulaci definice).

**Příklad 5.3** Označíme-li množinu $V = \{(2x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Potom $\mathbf{V} = (V; +)$, kde + je klasické sčítání, je grupa a $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor. navíc platí, že $\mathcal{V} \subseteq\subseteq \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ je 3-dimenzionální prostor z Příkladu 5.1).

Jak je vidět, podprostor je jednoznačně určen množinou svých vektorů (operace sčítání a násobení skalárem jsou „dědičné“ z nadprostoru). Proto je vhodné se zamyslet, která podmnožina vektorového prostoru tvoří spolu s operacemi onoho prostoru vektorový podprostor.

**Věta 5.1** *Jestliže $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subseteq V$. Potom na neprázdné množině $U$ je definován podprostor tehdy a jen tehdy, platí-li*

*i) pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in U$ platí, že $\vec{u} + \vec{v} \in U$*

*ii) pro libovolné $k \in T$ a $\vec{v} \in U$ platí, že $k\vec{v} \in U$.*

**Věta 5.2** *Jestliže $\mathcal{U}_\rangle = (\mathbf{U}_i, \mathbf{T}, \cdot)$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$ pro libovolné $i \in I$, potom platí, že*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_\rangle \subseteq\subseteq \mathcal{V}.$$

*Přičemž průnik vektorových prostorů je vektorový prostor definovaný na průniku množin vektorů.*

## Lineární kombinace vektorů

**Definice 5.3** Mějme vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$. Potom řekneme, že vektor $\vec{v} \in V$ je *lineární kombinací vektorů* $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jestliže existují skaláry $k_1, \dots, k_n \in T$ takové, že platí

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i\vec{v}_i.$$

Jestliže $M \subseteq V$, potom označme $[M]$ množinu všech vektorů $\vec{v}$, které jsou lineární kombinací některých vektorů z $M$. Tato množina se nazývá *lineární obal množiny* $M$.

Předpokládejme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Potom existují skaláry $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, s_n \in T$ takové, že platí

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} s_i\vec{v}_i, \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i\vec{v}_i.$$

Snadno lze ověřit rovnost

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\vec{v}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(s_i + t_i)\vec{v}_i.$$

Platí proto, že vektor $\vec{u} + \vec{v}$ je opět lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (použijeme-li skaláry $s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n \in T$). Podobně také platí pro libovolné $t \in T$, že

$$t\vec{v} = t\sum_{i=1}^{n} t_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}(tt_i)\vec{v}_i.$$

Také vektor $t\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (použitím skalárů $tt_1, \dots, tt_n \in T$).

Tato pozorování společně s Větou 5.2 jsou jádrem důkazu následující věty.

**Věta 5.3** *Mějme vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$ a množinu vektorů $M$, potom $[M]$ je vektorový podprostor $\mathcal{V}$ (tedy $[M] \subseteq\subseteq \mathcal{V}$).*

*Navíc platí, že $[M]$ je nejmenší vektorový podprostor obsahující množinu $M$. Formálně zapsáno:*

$$[M] = \bigcap\{\mathcal{U} \subseteq\subseteq V \mid M \subseteq U\}.$$

Předchozí věta nám umožňuje zavést následující důležité pojmy.

**Definice 5.4** Mějme vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$. Jestliže existuje množina $M \subseteq V$ taková, že $[M] = \mathcal{V}$, potom říkáme, že *$M$ je množina generátorů prostoru $\mathcal{V}$*, nebo že *vektorový prostor $\mathcal{V}$ je generován množinou $M$*.

Řekneme, že *vektorový prostor $\mathcal{V}$ je konečné dimenze*, jestliže je generován některou konečnou množinou.

**Definice 5.5** Mějme vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$ a některé jeho podprostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$. Potom *součtem* (někdy *spojením*) těchto podprostorů nazýváme nejmenší vektorový prostor obsahující oba prostory. Toto spojení značíme $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Formálně tedy

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = [U \cup W].$$

Jestliže navíc platí, že $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{o}\}$, potom tento součet nazýváme *přímým součtem* a značíme jej $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.

# Reference


[1] D. Hort, J. Rachůnek: Algebra I., [Univerzita Palackého V Olomouci, 2003].

[2] Bican L.: Lineární algebra, [ SNTL Praha, 1979.].

[3] Waerden, L.: Algebra I., [Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.].